La formule du produit pour les fonctions sphériques sur les espaces symétriques

Piotr Graczyk, Université d'Angers, Angers, France
Patrice Sawyer, Mathématiques et informatique, Université Laurentienne, Sudbury, Canada

Les espaces symétriques

Un espace symétrique M est une variété riemannienne complète telle qu'à chaque point $p \in M$, il existe une isomérie σ_p qui fixe p et renverse la direction de toute courbe géodésique qui traverse p.

Tout espace symétrique M possède un groupe d'isométries G qui est transitif. Soit p_0 de M ; si K est le sous-groupe de G_0 (la composante connexe de G qui contient l'identité) qui fixe p_0 alors $M \simeq G_0/K$.

Exemple 1 : L'espace riemannien $\mathbb{R}^n$ doté de sa structure habituelle. Dans ce cas, $\sigma_p(x) = 2\,p - x$. On a alors $G = M(n) = \{x \to A\,x{+}b \colon A \in \mathbf{SO}(n), x \in \mathbb{R}^n\}$ et $K = \mathbf{SO}(n)$. On a alors $\mathbb{R}^n \simeq M(n)/\mathbf{SO}(n)$.

Exemple 2 : L'espace hyperbolique $\mathbf{H}^2 = \{x + i\,y \colon y > 0\}$ doté de sa structure habituelle. Dans ce cas $\sigma_i(z) = -1/z$. Pour tout autre $z_0 \in \mathbf{H}^2$, on choisit une isométrie T telle que $T(z_0) = i$ et on a alors $s_{z_0} = T^{-1} \circ s_i \circ T$.

Exemple 3 : L'espace $M = \mathbf{POS_1}(n, \mathbb{F})$ des matrices définies positives de déterminant un sur le corps $\mathbb{F}$ où $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ (nombres réels, complexes ou quaternioniques). L'espace tangent à la matrice identitée peut être identifié avec l'espace des matrices symétriques de trace 0. Sur cet espace tangent, la métrique est donnée par $\langle X, Y\rangle = \operatorname{trace}(X\,Y)$. Étant donné que le groupe d'isométries $\mathbf{SL}(n, \mathbb{F})$ (le groupe des matrices de format $n \times n$ et de déterminant un sur le corps $\mathbb{F}$) agit transitivement sur M par l'action $g \cdot P = g^*\,P\,g$, nous avons alors une description complète du métrique. Pour $P \in \mathbf{POS_1}(n, \mathbb{F})$, $\sigma_P(Q) = P\,Q^{-1}\,P$.

Le produit d'espaces symétriques est un espace symétrique. Il est donc raisonnable de ne considérer que les espaces symétriques irréductibles (c'est-à-dire, ceux qui ne peuvent pas être décomposés en produit d'espaces symétriques). Dans ce cas, on aura $M \simeq G/K$ où G est un groupe de Lie affine, un groupe simple compact ou un groupe simple non compact.

C'est à ce dernier que nous nous intéressons. Nous utiliserons le cas $\mathbf{POS_1}(n, \mathbb{F})$ comme exemple représentatif. Dans ce cas, $G = \mathbf{SL}(n, \mathbb{F})$ et $K = \mathbf{SU}(n, \mathbb{F}) = \{k \in \mathbf{SL}(n, \mathbb{F}) : k^* = k^{-1}\}$.

Les fonctions sphériques

Toute matrice $g \in \mathbf{SL}(n, \mathbb{F})$ peut s'écrire sous la forme $g = k\,e^H\,n$ où $k \in \mathbf{SU}(n, \mathbb{F})$, H est diagonale et réelle (l'espace de ces matrices est noté par $\mathfrak{a}$) et n est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. La matrice $H = \mathcal{H}(g)$ est uniquement déterminée par g. Cette décomposition est essentiellement basée sur le procédé de Gram-Schmidt.

Toute matrice $g \in \mathbf{SL}(n, \mathbb{F})$ peut aussi s'écrire sous la forme $g = k\,e^F\,k'$ où $k, k' \in \mathbf{SU}(n, \mathbb{F})$ et F est diagonale et réelle avec des éléments diagonaux décroissants. La matrice $F = a(g)$ est uniquement déterminée par g. Les éléments diagonaux de e^F sont les « valeurs singulières » de la matrice g. Cette décomposition est l'équivalent des coordonnées polaires ($a(g)$ est la « distance complexe » de g à l'identité). Nous avons

$$\int_{\mathbf{POS_1}(n,\mathbb{F})} f(P)\,dP = C \int_K \int_{\mathfrak{a}^+} f(k\,e^{2\,H}\,k^*)\,\delta(H)\,dH\,dk$$

où $\mathfrak{a}^+$ est l'ensemble des matrices diagonales réelles de format $n \times n$ dont les composantes diagonales sont décroissantes, $\delta(H) = \prod_{i<j} \sinh^m(H_i - H_j)$ et $m = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F}$.

De nombreuses fonctions importantes sur un espace symétrique ne dépendent que de cette « distance complexe ». Pour cette raison, la théorie de Fourier sur ce type d'espace est en grande partie axée sur ce type de fonctions. Les fonctions sphériques ϕ_λ jouent alors le rôle des fonctions exponentielles $e^{i\,\lambda}$. Dans le cas de $\mathbf{POS_1}(n, \mathbb{F})$, nous avons

$$\phi_\lambda(e^H) = \int_{\mathbf{SU}(n,\mathbb{F})} e^{(i\,\lambda - \rho)(\mathcal{H}(e^H\,k))}\,dk$$

où $\rho(H) = \frac{m}{2} \sum_{i<j}(H_i - H_j)$ et $m = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F}$.

Pour toute fonction f de « croissance modérée » telle que $f(k\,g\,k') = f(g)$ pour tout k, $k' \in K$ et $g \in G$, nous avons

$$f(g) = |W|^{-1} \int_{\mathfrak{a}^*} \mathscr{H}(f)(\lambda)\,\phi_\lambda(g)\,|c(\lambda)|^{-2}\,d\lambda$$

où $\mathfrak{a}^*$ est l'ensemble des fonctionnelles linéaires à valeurs complexes sur $\mathfrak{a}$ et

$$\mathscr{H}(f)(\lambda) = \int_G f(g)\,\phi_{-\lambda}(g)\,dg.$$

La formule du produit

Les livres d'Helgason [6, 7] donnent une bonne introduction à ce sujet.

Il est bien connu qu'il existe une mesure de probabilité $\mu_{X,Y}$ telle que

$$\phi_\lambda(e^X)\,\phi_\lambda(e^Y) = \int_{S_{X,Y}} \phi_\lambda(e^H)\,d\mu_{X,Y}(H)$$

où $S_{X,Y} = a(e^X\,K\,e^Y)$. Il est intéressant de noter que $S_{X,Y}$ correspond à l'ensemble de tous les choix possibles de valeurs singulières d'un produit de deux matrices dont les valeurs singulières respectives sont données par e^X et e^Y.

Quelques questions :

1. Dans quelles situations a-t-on $d\mu_{X,Y} = k(H, X, Y)\,\delta(H)\,dH$?
2. Que peut-on dire de la fonction $k(H, X, Y)$ si elle existe ?
3. Comment décrire précisément $S_{X,Y}$?
4. Pourquoi l'existence de la fonction $k(H, X, Y)$ est-elle importante ?

Quelques résultats . . .

Les espaces symétriques de rang un :

Beaucoup de questions sont plus simples quand la dimension de $\mathfrak{a}$, le rang, est un. Pour nous, cela correspond à $G = \mathbf{SL}(2, \mathbb{F})$.

Dans ce cas, la fonction $k(H, X, Y)$ est connue explicitement. Elle existe dès que $X \neq 0$ et $Y \neq 0$. Ces résultats peuvent être retrouvés dans l'article [1]. L'ensemble $S_{X,Y}$ est essentiellement le segment qui va de $X - Y$ à $X + Y$ (un ajustement est nécessaire si $X - Y \notin \mathfrak{a}^+$).

Groupe G complexe :

Pour nous, cela correspond à $G = \mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$. Dans ce cas, la forme particulièrement simple des fonctions sphériques permet de donner une expression explicite pour la fonction $k(H, X, Y)$ dans le cas où $X, Y \in \mathfrak{a}^+$.

Il faut noter que ces résultats, qui apparaissent dans l'article [2], sont les premiers sur la formule du produit depuis les années 70.

Les espaces symétriques de type non compact (cas général) :

Pour nous, cela correspond à $G = \mathbf{SL}(n, \mathbb{F})$. Dans l'article [3], nous montrons que la densité existe dès que $X \neq 0$, $Y \neq 0$ et qu'au moins l'un de X ou de Y appartient à $\mathfrak{a}^+$ (nous obtenons en fait des résultats plus généraux). Il faut préciser que cette démonstration n'est pas constructive et donne peu d'information sur $k(H, X, Y)$.

Dans l'article [4], nous étudions $S_{X,Y}$ qui se révèle être connexe et avoir une forme polygonale. Nous montrons alors que pour $G = \mathbf{SL}(n, \mathbb{F})$, $S_{X,Y}$ est le même quelque soit $\mathbb{F}$.

Dans l'article [5], nous obtenons la formule suivante si $X, Y \in \mathfrak{a}^+$:

$$k(H, X, Y) = |W|^{-1} \int_{\mathfrak{a}^*} \phi_\lambda(e^X)\,\phi_\lambda(e^Y)\,\phi_\lambda(e^H)\,|c(\lambda)|^{-2}\,d\lambda \qquad (1)$$

À la question « Pourquoi l'existence de la fonction $k(H, X, Y)$ est-elle importante ? », il convient de répondre qu'étant donné la théorie de Fourier sur les espaces symétriques, l'existence de la densité k garantit que la convolution de deux fonctions bi-K-invariantes sera donnée par

$$(f_1 \star f_2)(g) = \int_{G\times G} f_1(g_1)\,f_2(g_2)\,k(a(g_1), a(g_2), a(g))\,dg_1\,dg_2$$

ce qui explique le titre de l'article [1].

Une autre conséquence de l'existence de la densité k est que la convolution de mesures qui ne « chargent pas » $\mathfrak{a}^+$ est absolument continue même si les mesures du produit ne le sont pas. En effet, la densité de la mesure $\mu \star \nu$ est alors donnée par

$$\int_G \int_G k(H, a(g_1), a(g_2))\,d\mu(g_1)\,d\nu(g_2).$$

Une application de la formule du produit : Soit g une matrice dont les valeurs singulières sont toutes différentes et positives. Alors $K\,g\,K$ engendre G. En particulier, si on fixe des valeurs singulières positives distinctes et dont le produit est un, alors les matrices ayant ces valeurs singulières engendrent G.

La suite : une conjecture

L'« épaisseur » de $S_{X,Y}$ est centrale à la question de l'existence de la fonction k : k existe si et seulement si $(S_{X,Y})^\circ \neq \emptyset$.

Conjecture : Soit $G = \mathbf{SL}(n, \mathbb{F})$ et soit $X = \operatorname{diag}[\overbrace{X_1, \ldots, X_1}^{p_1}, \overbrace{X_2, \ldots, X_2}^{p_2}, \ldots, \overbrace{X_r, \ldots, X_r}^{p_r}]$, $Y = \operatorname{diag}[\overbrace{Y_1, \ldots, Y_1}^{q_1}, \overbrace{Y_2, \ldots, Y_2}^{q_2}, \ldots, \overbrace{Y_s, \ldots, Y_s}^{q_s}] \in \overline{a^+}$ (nous supposons que les X_i, respectivement les Y_i, sont distincts ; naturellement, $p_i \geq 1$ et $q_i \geq 1\ \forall i$). Alors $S_{X,Y} = a(e^X K e^Y)$ a un intérieur non vide si et seulement si

$$\max\{p_i\} + \max\{q_i\} \leq n$$

sauf si n est pair et

$$X = a \begin{bmatrix} I_{n/2} & 0 \\ 0 & -I_{n/2} \end{bmatrix},\ Y = b \begin{bmatrix} I_{n/2} & 0 \\ 0 & -I_{n/2} \end{bmatrix}.$$

Nous avons démontré que ces conditions sont nécessaires. Le raisonnement qui nous a amené à la formule (1) nous donne une piste pour démontrer le reste de la conjecture. L'ordinateur nous a permis de démontrer que ces conditions sont nécessaires si $n \leq 22$. Cela représente 37 396 158 272 cas !

Références

[1] M. Flensted-Jensen et T. Koornwinder. *The convolution structure for Jacobi expansions*, Ark. Mat. 10 (1973), 245–262.

[2] P. Graczyk et P. Sawyer. *The product formula for the spherical functions on symmetric spaces in the complex case*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 204, No. 2, 2002, 377–393.

[3] P. Graczyk et P. Sawyer. *The product formula for the spherical functions on symmetric spaces of noncompact type*, Journal of Lie Theory, Vol. 13, No. 1, 247–261, 2003.

[4] P. Graczyk et P. Sawyer. *Some convexity results for the Cartan decomposition*, Canadian Journal of Mathematics, Vol. 55, 1000–1018, 2003.

[5] P. Graczyk et P. Sawyer. *On the kernel of the product formula on symmetric spaces*, *Journal of Geometric Analysis*, Vol. 14, No. 4, 2004.

[6] S. Helgason. *Group and Geometric Analysis*, Academic Press, New York, 1984.

[7] S. Helgason. *Geometric analysis on symmetric spaces*, Mathematical surveys and monographs, Vol. 39, AMS, 1994.

Remerciements : Ce travail est subventionné par CRSNG NSERC